Matematyka kluczem do nowoczesnych technologii

WYKŁAD INAUGURACYJNY PROF. DR HAB. WOJCIECHA OKRASIŃSKIEGO

M o t t o:
„Matematycy polscy twierdzą, że ich nauka stoi w Polsce wysoko, a matematycy innych krajów na ogół zdanie to potwierdzają; w każdym razie polska produkcja towaru zwanego matematyką cieszy się na świecie lepszą opinią niż nasza produkcja konserw, tekstyliów i radioodbiorników. Że nasz kraj znajduje się w tej chwili w sytuacji ekonomicznej bardzo trudnej, wiedzą wszyscy ludzie trzeźwi. Ale nawet oni nie wiedzą, że matematyka dysponuje środkami umożliwiającymi ulepszenie produkcji konserw, tekstyliów i radioodbiorników”

profesor Hugo Steinhaus (UAM, Poznań 16.11.1963)

■ Pytając ludzi na ulicy i w różnych instytucjach o użyteczne dziedziny wiedzy nie można oczekiwać, aby matematyka była na czele tej listy. Oczywiście uważa się, że jest użyteczna, jeżeli chodzi o trening umysłowy dla uczniów. Ale nawet wielu dobrze wykształconych ludzi twierdzi, że matematyka była dla nich horrorem już w szkole.

■ Jednakże od połowy lat siedemdziesiątych XX wieku w wielu rozwiniętych krajach wzrasta zainteresowanie możliwościami zastosowań metod matematycznych w przemyśle i handlu w celu unowocześnienia produktów, poprawienia jakości oraz zmniejszenia kosztów produkcji.

„Żądanie maksymalnej wydajności badań przemysłowych i ich dzisiejszy rozwój mogą być tylko osiągnięte poprzez rosnące wykorzystanie metod matematycznych. Metody symulacyjne są przykładem drastycznej redukcji wysiłku eksperymentalnego przy konstrukcji produktów złożonych”.

Prof. Weule, dyrektor badawczy koncernu Daimler (1994)

„Matematyka pomaga opracowywać produkty lepiej, szybciej, bezpieczniej, taniej poprzez symulację zjawisk złożonych, redukcję strumienia danych, wizualizację”.

Prof. J.J.Lions, matematyk francuski (1994)

■ Panuje przekonanie, że matematyka może być użyteczna tylko dla koncernów wytwarzających produkty zaawansowane technologiczne, jak np. samochody, samoloty, komputery. Uważa się natomiast, że matematyka na nic się nie przydaje, jeżeli produkcja lub produkty nie są zaawansowane technologicznie.

■ W raporcie o roli matematyki w rozwoju cywilizacyjnym świata przygotowanym przed laty w USA przez prof. Davida znalazło się następujące stwierdzenie:

„Wchodząc w erę zaawansowanych technologii weszliśmy w erę technologii matematycznej”

■ Konsekwencją tego stwierdzenia jest to, że można zmienić każdy produkt w produkt nowoczesny inwestując więcej wiedzy naukowej, i w szczególności więcej matematyki, w jego produkcję.

■ Obecnie często stosuje się metody matematyczne do rozwoju technologii podstawowych stosowanych przy produkcji tkanin, mebli, szkła, wyrobów metalowych, żywności. Matematyka jest podstawą symulacji zjawisk w otaczającym nas świecie jak np. lawiny, fale wodne czy zanieczyszczenie środowiska. Metody matematyczne są też coraz częściej wykorzystywane w medycynie i naukach społecznych.

Dlaczego notuje się tak gwałtowny rozwój zastosowań matematyki w przemyśle i innych dziedzinach ludzkiej działalności akurat w ostatnich trzydziestu paru latach?

■ Odpowiedź jest prosta. Wprawdzie ludzie od paru tysięcy lat prowadzili obliczenia ułatwiające im życie w takich dziedzinach jak np. nawigacja czy budowa konstrukcji, jednak wiele problemów pozostawało bez odpowiedzi ze względu na skomplikowane i długotrwałe rachunki. Dopiero niedawno pojawiło się nowe narzędzie pozwalające zrealizować te obliczenia.

■ Tym narzędziem jest komputer, który z każdym rokiem posiada coraz większe możliwości obliczeniowe. Jeżeli pod koniec lat siedemdziesiątych superkomputer firmy Cray mógł wykonać 100.000.000 operacji rachunkowych na sekundę, to obecnie wykonuje 30.000.000.000.000.000.000.000.000 operacji na sekundę (30 trylionów[2]). To właśnie dzięki komputerom można obliczyć to, czego nie można było policzyć jeszcze kilkadziesiąt lat temu.

Kluczowymi słowami określającymi rolę matematyki w przemyśle są:

- *Symulacja*
- *Redukcja danych*
- *Sterowanie*
- *Optymalizacja*
- *Wizualizacja*

Głównymi elementami metodologicznymi w zastosowaniu matematyki do problemów przemysłowych są:

- *Modelowanie matematyczne*
- *Obliczenia naukowe*

■ *Modelowanie matematyczne* polega na przekształceniu obiektów rzeczywistych w matematyczne poprzez pominięcie szczegółów, które są nieważne ze względu na pytania, które stawiamy. Może być wiele różnych poprawnych modeli tego samego problemu. Modelowanie jest rodzajem sztuki, jeśli chodzi o znalezienie modelu najlepszego w sensie określonych kryteriów.

■ Przez *obliczenia naukowe* rozumiemy znalezienie algorytmu pozwalającego rozwiązać równania związane z modelem, napisać program i uporządkować dane otrzymane w wyniku obliczeń.

Przykłady modelowanych problemów z różnych dziedzin życia:

- Przelot pacjenta po operacji oka
- Badanie jakości tkanin wełnianych
- Biologiczna kontrola szkodników upraw rolniczych
- Samozapłon filarów węglowych w kopalniach
- Polewa czekoladowa na lodach
- Zachowanie się rotopionego szkła podczas chłodzenia
- Czy zjeżdżalnia wodna jest bezpieczna?
- Czujniki poduszki powietrznej w samochodzie
- Optymalne nawadnianie ogrodu.

Dokładniej zostaną omówione trzy z nich.

Przelot pacjenta po operacji oka

Problem został przedstawiony przez British Airways.

- Szpitale w Wielkiej Brytanii oferują ambulatoryjne operacje okulistyczne, np. przylepienie odlepionej siatkówki. Wielu pacjentów przylatuje z kontynentu.
- Operacja polega na implantacji pęcherzyka gazowego dociskającego siatkówkę do oka
- Zanikanie pęcherzyka trwa kilka dni.

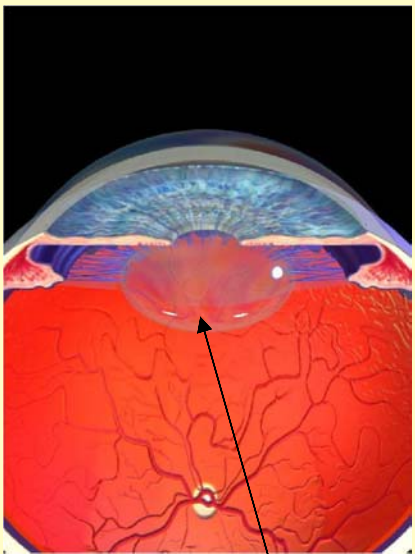
British Airways zabraniają pacjentom latać w czasie do 7 dni po operacji.

Co dzieje się w czasie lotu?

Następuje spadek ciśnienia P(t) w kabinie. Powoduje to rozszerzanie pęcherzyka
i spadek ciśnienia ocznego p(t). Niech $\Delta p = p(t) - P(t)$

Punkt krytyczny:
Jeżeli $\Delta p < 50$mmHg, to krew nie dopływa do siatkówki. Pacjent cierpi z powodu silnego bólu i po 50s ślepnie.

Inny aspekt problemu: duże wydatki dla instytucji ubezpieczeniowych
Problem do modelowania: Skonstruować model opisujący zmianę ciśnienia ocznego u pacjenta po operacji podczas lotu samolotem.



Pęcherzyk gazu

Rozwiązanie problemu:

Założenia:
1) zasada Boyle's w pęcherzyku gazu
2) nieściśliwość wody
3) brak napięcia powierzchniowego
4) ciśnienie oczne zmienia się tylko wskutek działania mięśni gałki ocznej

$$1) \Rightarrow p(z)\cdot V_g(t) = A = R\cdot T$$

$$4) \Rightarrow \frac{d}{dt}\big(V_e(t) - V_g(t)\big) = F_{in} - F_{out}$$

$$V_e(t) = w\big(p(t) - p_0(t)\big)$$

V_g , V_e	... ciśnienie gazu i oka, odpow.
T	... temperatura
w	... szukana funkcja

$$p(t) = p_0(t) + p_0(0)\cdot\varepsilon\cdot f(t), \qquad \varepsilon << 1$$

Podstawienie daje linowe zagadnienie początkowe:

$$\frac{d}{dt}\left(p_0(0)\,\varepsilon\, f(t) w'(0) - \frac{A}{p_0(t)} + \frac{\varepsilon\cdot A p_0(0) f(t)}{p_0^2(t)}\right) = F_{in} - F_{out} \qquad F_{in} - F_{out} = -b\big(p(t) - p_0(t) - p_i\big)$$

ze znanymi warunkami początkowymi dla ciśnienia i objętości.

Rezultaty:
W 2 dni po operacji krytyczny poziom 50mmHg nie jest przekraczany podczas lotu. Zgodnie ze przyjętymi założeniami można zalecić bezpiecznie:
Pacjent po operacji okulistycznej może odbyć lot po 4 dniach!

Polewa czekoladowa na lodach

Problem sformułowany przez Unilever (Langnese).
Proces produkcji:

- Lody przesuwają się poprzez "kurtynę" z roztopionej czekolady tworzącej na nich polewę.
- Zamrożone lody zawierają około 50% powietrza (powoduje to odczucie bardzo dobrego smaku podczas rozpuszczania się na języku).
- Podczas tworzenia polewy temperatura czekolady jest wyższa niż punkt topnienia lodów.

Część lodów topi się i powietrze ucieka. Warstwa powietrza tworzy się między lodami i polewą z czekolady. Roztopione lody zamraża się ponownie. Warstwa powietrza jest główną przyczyną kruszenia się polewy czekoladowej.

Problem do modelowania: Znaleźć model opisujący formowanie się warstwy powietrza i opracować strategie pozwalające na zmniejszenie tej warstwy.
Rozwiązanie problemu:

Założenia:

1) Polewa jest rozłożona jednostajnie.
2) Pęcherzyki powietrza wewnątrz lodów są pominięte.
3) Symetria obiektu

Rozważa się jednowymiarowy przekrój poprzez lody

| Czekolada | Powietrze | lód roztopiony | lód zmrożony |
0 p R(t) s(t) q

i stosuje równanie przewodnictwa cieplnego dla poszczególnych warstw:

$$\varrho(x,T)\, c(x,T)\, \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,T)\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

gdzie
ρ ...gęstość, T ...temperatura,
c ...ciepło właściwe, k ...przewodnictwo cieplne

Warunki graniczne:

x = 0

$$k_c \frac{\partial T}{\partial x} = H(T(0,t) - T_a)$$

x = p

$$k_c \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x_p^-} = k_a(x_p^+, T(x_p^+, t))\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x_p^+}$$

x=R(t)

$$k_a(R(t)^-, T(R(t)^-, t))\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{R(t)^+} = k_m \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{R(t)^+}$$

x=s(t) (warunek Stefana):

$$L\varrho_i \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_m \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{s(t)^-} + k_i \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{s(t)^+}$$

x = q

$$T(x_m, t) \equiv T_b$$

Jest to nieliniowy problem ze swobodnym brzegiem, który rozwiązuje się numerycznie.

Rezultaty:
Wykrycie wpływu parametrów w modelu na grubość warstwy powietrza. Jeżeli temperatura czekolady = const to zależność między grubością czekolady i grubością warstwy powietrza jest linowa. Jeżeli grubość czekolady = const to zależność między temperatury czekolady i grubością warstwy powietrza jest liniowa.

Czy zjeżdżalnia wodna jest bezpieczna?

Pochodzenie problemu:
Wypadek na zjeżdżalni wodnej w centrum wypoczynkowym w Wawielpark w Południowej Afryce; mężczyzna uszkodził kręgosłup.

Problem do modelowania: Czy ta zjeżdżalnia wodna jest bezpieczna?
Dostępne dane:

- Zdjęcia zjeżdżalni wodnej.
- Pomiary parametrów zjeżdżalni wodnej w miejscu, gdzie strumień wody jest najgłębszy.
- Pomiary całkowitego czasu zjazdu osoby porównywalnej z ofiarą i scyzoryka.

Zagadnienia do wyjaśnienia:

- Czy są jakieś niebezpieczne punkty na zjeżdżalni?
- Czy zetknięcie z wodą przy zjeździe jest niebezpieczne?
- Czy zjeżdżającym grozi jakieś niebezpieczeństwo w wodzie?

Uproszczenia:
Symulacja ruchu punktu materialnego na zjeżdżalni wodnej. Zjeżdżalnia jest krzywą jednowymiarową (oznacza to że tylko uśrednione siły są rozważane).

1) Matematyczny opis zjeżdżalni. Przybliżenie krzywej ześlizgu: ▪ Splajny kubiczne ▪ Metoda regresji - ta metoda jest lepsza!
2) Fizyczny opis problemu: Z prawa Newtona otrzymuje się równanie ruchu

Rozwiązanie problemu:

1. ruch na zjeżdżalni (punkt materialny) siły na zjeżdżalni

siły na zjeżdżalni

2. swobodny spadek ze zjeżdżalni do wody - grawitacja
3. ruch w wodzie (ciało jako kula połączona z walcem) - siły oporu działające na ciało
   Uderzenie w dno? (punkt materialny)

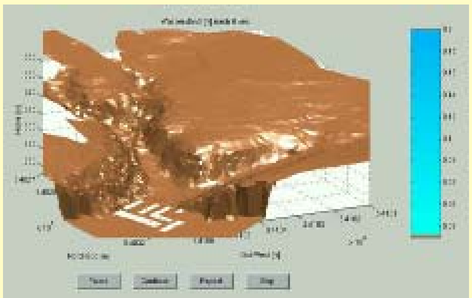
3) Rozwiązanie numeryczne: Metody Eulera i Runge-Kutty
Rezultaty: Ten prosty model wyklucza możliwość wypadku na zjeżdżalni przy zachowaniu norm bezpieczeństwa (symulacja uwzględnia także ześlizg głową do przodu).

■ Symulacje komputerowe są jednym z najważniejszych narzędzi zastępujących coraz częściej eksperymenty w rzeczywistości

■ Matematyka jest zawsze podstawą jakiejkolwiek symulacji komputerowej (nawet zwykłej gry komputerowej)

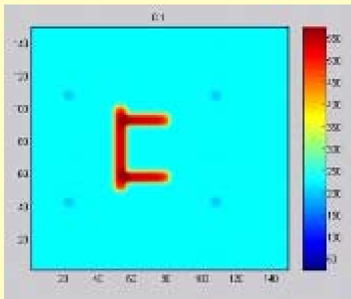
■ Jednakże należy pamiętać, że stale trzeba ulepszać symulacje (stosować nowe metody matematyczne i coraz lepsze komputery), gdyż ciągle wiele z nich nie odtwarza zachowania badanych zjawisk w czasie rzeczywistym np. symulacja przy pomocy komputera 1 minuty pożaru w tunelu trwa 1 dzień.

Przedstawimy przykłady kilku symulacji.



Symulacja powodzi po opadach
w miejscowości położonej
w kotlinie górskiej (Kaiserslautern)

Symulacja zalewania
kanałów przeciwpowodziowych
po opadach (Kaiserslautern)



Symulacja
rozkładu temperatury
w formie odlewniczej (Lumel)

ECMI

Europejskie Konsorcjum Matematyki Przemysłowej (ECMI)

■ Założone w 1986 przez matematyków z kilku europejskich uniwersytetów (Oxford, Kaiserslautern, Eindhoven, Linz) odczuwających potrzebę współpracy między uczelniami i grupami badawczymi w przemyśle.
■ Działa w skali europejskiej.

Dwa podstawowe cele ECMI:

■ Promocja skuteczności metod matematycznych w ulepszaniu produkcji przemysłowej.
■ Propagowanie programu edukacyjnego przygotowującego studentów matematyki do roli przyszłych ekspertów w przemyśle.

Ośrodki stowarzyszone z ECMI:

▪ Barcelona (Hiszpania) Bristol (W.Brytania) ▪ Dresden (Niemcy) Eindhoven (Holandia) ▪ Glasgow (W.Brytania) Göteborg (Szwecja) ▪ Grenoble (Francja) Kaiserslautern (Niemcy) ▪ Lappeearanta (Finlandia) Lund (Szwecja) ▪ Linz (Austria) Lyngby (Dania) ▪ Madrid (Hiszpania) Milan (Włochy) ▪ Novi Sad (Serbia) Oxford (W.Brytania) ▪ Trondheim (Norwegia) Zielona Góra (Polska)

■ W marcu 2004 roku został opublikowany pod patronatem ECMI raport noszący tytuł:

MATHEMATICS: Key to the European Knowledge-based Economy.
A Roadmap for Mathematics in European Industry.

■ Obecnie ten dokument jest rozpowszechniany w centralnych urzędach Unii Europejskiej.

Fragment z raportu:

„Dowolna technologia jest nowoczesna na tyle,
na ile metod matematycznych zostało wykorzystanych przy jej tworzeniu"

Literatura:

1. H.Neunzert, A.H. Siddiqi, *Industrial Mathematics-Ideas and Examples*. Bericht 177, ITWM Kaiserslautern 1997.
2. H.Neunzert, *Mathematics as a Key to the Key Technologies*. Bericht 16, ITWM Kaiserslautern 1999.
3. MACSI-net. *A Roadmap for Mathematics in European Industry. Mathematics*: *Key to the European Knowledge-based Economy*. Eds. A.Cliffe, R.Mattheij, H.Neunzert, 2004.

WYKŁAD ZOSTAŁ WYGŁOSZONY 1 PAŹDZIERNIKA 2004 ROKU W AULI UNIWERSYTECKIEJ PODCZAS UROCZYSTOŚCI INAUGURACJI ROKU AKADEMICKIEGO 2004/2005