Kazimierz Głazek

Matematyka GÓR dotyka

Będąc w listopadzie 1978 r. w Budapeszcie na zaproszenie Bolyai János Matematikai Társulat (czyli węgierskiego towarzystwa matematycznego), przy okazji miałem przyjemność wygłosić na zebraniu tamtejszego towarzystwa geograficznego referat – o górach, a nie o matematyce – ilustrowany przeźroczami na temat polskiej narodowej wyprawy na słynną i przepiękną górę *K2* czyli *Chogori* w Karakorum. Zostałem wtedy zapytany przez pana Gyula Staara, dziennikarza poczytnego pisma popularno-naukowego *Természet Világa* (odpowiednika naszego *Wszechświata* lub *Problemów*), jaka jest przyczyna, iż zajmuję się jednocześnie algebrą ogólną i wspinaczką wysokogórską (por. wywiad ze mną na stronach 62-65 w zeszycie 2 z roku 1979 tego czasopisma). *Ad hoc* wymyślona wtedy analogia okazała się nad wyraz trafna. Oba te zainteresowania mają wspólną cechę: *szerokie widnokręgi*, oba też **uczą pokory** – **wobec potęgi i wspaniałości przyrody oraz głębi i piękna nauki**. W tym krótkim eseju postaram się uzasadnić wspomnianą analogię pomiędzy pięknem ogólnych rozważań matematycznych, a wspaniałością wspinaczki i turystyki górskiej. Z góry muszę przeprosić, że nie uda mi się uniknąć różnych terminów matematycznych (a w szczególności – algebraicznych), które mogą być mało zrozumiałe dla ogółu czytelników. Siłą rzeczy będę się tu posługiwał przykładami z dziedzin bliskich moim zainteresowaniom badawczym lub dydaktycznym.

Jednym z głównych zarzutów stawianych badaniom z algebry ogólnej jest fakt, że w pracach z tej dziedziny „dominuje trend uogólnień". Jednak cały obszerny dział matematyki – zwany algebrą ogólną – tym się właśnie cechuje (podobnie zresztą jak topologia ogólna generalizuje pojęcia i rezultaty z klasycznej topologii metrycznej czy też szeroko pojętej analizy). Ten krytykowany nieraz trend wywodzi się od Alfreda N. Whiteheada, który starał się go upowszechnić w swym dziele *A Treatise on Universal Algebra*, opublikowanym w Cambridge – przez wydawnictwo „University Press" – już w roku 1898, ale jeszcze trochę wcześniej podobną ideę zbudowania algebry uniwersalnej propagował James J. Sylvester. Takie ogólne spojrzenie pozwala wyłowić podobną istotę rzeczy w rezultatach należących do różnych gałęzi algebry, rozwijanych wcześniej niezależnie w różnych aspektach przez takich uczonych, jak William Rowan Hamilton, Hermann Günther Grassmann, Arthur Cayley i George Boole, czy też Augustus de Morgan. Spojrzenie takie ułatwia sformułowanie twierdzeń ogólnych, które są zwykle łatwiejsze do dowodu niż oryginalne twierdzenia w konkretnych klasach algebr. Trudności matematyczne takich badań naukowych są przeniesione z poziomu rachunkowego (preferowanego, jak się wydaje, przez niektórych adwersarzy) na poziom wyszukiwania istotnych założeń i upraszczania starych, klasycznych dowodów, a niejednokrotnie wymagają zdefiniowania nowych pojęć (takich np. jak homomorfizm słaby, czy też *n*-arna grupa) oraz ich zbadania. Tego rodzaju przykładów można podawać bardzo wiele, ale nie będziemy tu wchodzić w szczegóły. Rozumowania są wtedy bardziej eleganckie i nie oparte na zbędnych założeniach – i w tym tkwi właśnie piękno algebry ogólnej. Przywodzi to na myśl pytanie często stawiane studentom przez profesora Bronisława Knastera na jego wykładach z topologii: „Czemu sułtan turecki nosi zielone szelki?" Zwykle po zadaniu tego pytania na sali zapadała grobowa cisza. A przecież odpowiedź jest dziecinnie łatwa: „Aby mu spodnie nie opadały!" Jest to przykład na to, jak dodatkowe zbędne założenia wprowadzają w błąd.

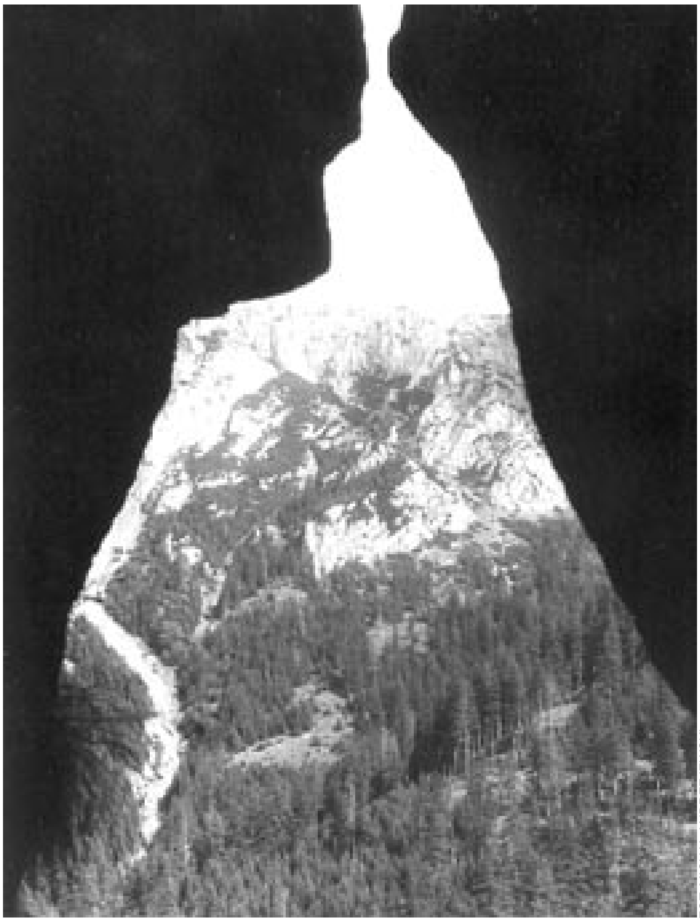
Dobrym przykładem jest tutaj tzw. *Zasadnicze Twierdzenie o Homomorfizmach* (zwane niekiedy *Pierwszym Twierdzeniem o Izomorfizmach*) dla algebr ogólnych sprecyzowane w ramach ogólnych badań algebraicznych przez Garretta Birkhoffa, które zainicjował w latach trzydziestych ubiegłego wieku (a następnie udowodnione w latach siedemdziesiątych również dla pojęcia homomorfizmu słabego – w czym autor tego eseju miał swój udział). Wspomniane twierdzenie uogólnia odpowiednie twierdzenia o homomorfizmach dla grup i pierścieni sformułowane oraz porządnie udowodnione przez Emmę Noether i jej uczniów (a później dowiedzione przez Philipa J. Higginsa dla ogólniejszych struktur algebraicznych będących tzw. Ω-grupami), których sformułowania wymagały pojęć podgrupy normalnej czy też ideału, a dowody były sporo trudniejsze niż twierdzenia ogólnego, używającego pojęcia kongruencji (czyli relacji typu równoważności zgodnej z działaniami danej algebry). Dodajmy, że pojęcie kongruencji, wywodzące się pierwotnie z elementarnej arytmetyki liczb całkowitych za sprawą Karla Friedricha Wilhelma Gaussa, stało się później bardzo owocne we współczesnej algebrze i teorii liczb. Nawiasem mówiąc - mało kto zdaje sobie sprawę, jak kolosalnym osiągnięciem w dziejach ludzkości było wyabstrahowanie pojęcia liczby. Zainteresowanych odsyłam tutaj do pięknej książki napisanej przez Georgesa Ifraha *Les chiffres ou l'historie d'une grande invention* (Paris 1985), a udostępnionej polskiemu czytelnikowi przez *Ossolineum* w tłumaczeniu profesora Stanisława Hartmana.

Warto może wspomnieć, iż niektórzy znani matematycy bardzo sobie cenili takie ogólne podejście do twórczości naukowej, polegające na daleko idących uogólnieniach, a nie tylko na żmudnej pracy rzemieślniczej. Znany matematyk i logik, profesor Andrzej Mostowski mówił kiedyś, że analogie między twierdzeniami mogą dostrzec zdolni matematycy, natomiast analogie między teoriami odkrywają bardzo dobrzy matematycy. Niestety, według niektórych opiniodawców, pracujących dla np. Komitetu Badań Naukowych, byłby to „niski poziom pokonywanych trudności matematycznych". Wynika to stąd, że cała praca intelektualna prowadząca do ostatecznych sformułowań nie zostaje udokumentowana na papierze (w przeciwieństwie do roboty bardziej rzemieślniczej, jaką jest prowadzenie uciążliwych, ale bardziej rutynowych rachunków). Nasuwa się tu też paralela z grą w szachy (którą zresztą profesor Hugo Steinhaus uważał za część matematyki), gdzie wielu znawców uznaje, że misterna gra kombinacyjna jest piękniejsza i intelektualnie cenniejsza (choć może bardziej ryzykowna) od mrówczej gry pozycyjnej.

Zauważmy, iż niektórzy autorzy prac naukowych (a w szczególności matematycznych) – albo z nieudolności, albo po to, by praca wydawała się trudniejsza, niż jest w rzeczywistości – używają skomplikowanych oznaczeń i wyszukanej terminologii. Nasuwa się tutaj analogia do znajdywania nowego sposobu pokonania ściany szczytu górskiego w sposób zbyt skomplikowany ze względu na brak dostatecznych umiejętności w wyszukiwaniu najłatwiejszej metody pokonania piętrzących się trudności przez autorów takiego przejścia. Bywają takie warianty przebycia ścian tatrzańskich czy alpejskich, które są niekiedy poprowadzone zygzakiem, w sposób mało logiczny, a nawet wskazujący na specjalne wyszukiwanie trudności, bez wykorzystania narzucających się formacji skalnych. Wchodząc wraz z profesorem Richardem M. Schorim w 1974 roku na Rysy poprzez północne zerwy zachodniej grani Rysów, pokonywaliśmy teren, którym wiodła – jak się okazało – droga nadzwyczaj trudna według stosowanej w Tatrach skali trudności. Choć było to drugiego czerwca, warunki były niemal zimowe. Ze względu na warunki w Tatrach zrezygnowaliśmy z trudniejszej wspinaczki ścianą Kazalnicy Mięguszowieckiej. Musieliśmy się wspinać po sporym świeżym opadzie śniegu, mieliśmy bowiem mało czasu, gdyż Schori przybył do Polski tylko na parę dni (w celu wygłoszenia wykładów z topologii). Ponadto początkowo wspinaczkę bardzo utrudniała gęsta mgła. Jednakże udało się nam znaleźć łatwiejszą drogę niż ta już istniejąca (czyli przebyta już przez innych wspinaczy) w tej połaci ściany. Wracając do częstokroć zbyt skomplikowanej terminologii stosowanej w niektórych środowiskach naukowych, zwróćmy uwagę, że często żargon „naukowy” służy tylko do zakrycia pewnej pustki intelektualnej. Warto tutaj wspomnieć, że w świeżo opublikowanej, w tłumaczeniu polskim, książce „*Modne bzdury*” (w wydawnictwie „Prószyński i S-ka”, 2004) jej autorzy – skądinąd znani fizycy, profesorowie A. Sokal i J. Brickmont – znakomicie obnażyli pseudonaukowy bełkot nadużywany przez niektórych intelektualistów. Nawiązując do moich zainteresowań, jestem przekonany, że prostota, zarówno rozwiązań zagadnień matematycznych, jak i sposobów pokonywania trudności wspinaczkowych, dodaje im piękna i jest wartością nie do pogardzenia.

Czasem, aby znaleźć właściwą drogę wspinaczkową, trzeba przyjrzeć się ścianie z odpowiedniej perspektywy, na przykład z przeciw-stoku, a nie spod stromej ściany. W różnych naukach bardzo owocnym jest objęcie badaniami większego obszaru, aby mieć szerszy ogląd rzeczywistości. Zamiast badać jednostkowe zjawiska, warto czasem zająć się analizą porównawczą kilku, a nawet wielu zjawisk, gdyż może to zaowocować ciekawymi i ogólnymi spostrzeżeniami. Na przykład w badaniach geologicznych – zamiast chodzić po ograniczonym terenie z młotkiem i innymi narzędziami i badać poszczególne „odkrywki geologiczne” tradycyjnymi metodami – niekiedy lepiej przeanalizować zdjęcia lotnicze lub nawet satelitarne obejmujące ogromny teren. Pozwala to na lepsze poznanie budowy geologicznej badanego obszaru i wykrycie cennych, ukrytych złóż, co bywało trudne i kosztowne do osiągnięcia metodami z ubiegłych stuleci. Także w matematyce częstokroć pomaga ogólne spojrzenie. Zauważmy więc, że również w badaniach matematycznych niejednokrotnie skomplikowane dowody trudnych twierdzeń po dogłębnej analizie ulegają znacznym uproszczeniom. Nieraz, aby rozumowania nabrały odpowiedniej przejrzystości, trzeba zbudować całą nową teorię matematyczną. Ważnym przykładem na poparcie tej tezy jest tzw. *Podstawowe Twierdzenie Algebry Liczb Zespolonych* mówiące, iż każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach rzeczywistych (lub nawet zespolonych) ma co najmniej jeden pierwiastek w dziedzinie liczb zespolonych. Pierwsze dowody tego twierdzenia (m.in. ten, przedstawiony w roku 1799 przez słynnego Karla F. Gaussa) były dość skomplikowane. Jednakże stworzenie teorii funkcji analitycznych pozwoliło go otrzymać jako natychmiastowy wniosek z ogólnego twierdzenia Josepha Liouville’a.

Znowu przychodzi tutaj na myśl wspomniana analogia między abstrakcyjnymi rozważaniami algebraicznymi a taternictwem. Niekiedy pracę nad ogólnymi prawidłowościami w bardzo ogólnej teorii matematycznej i na wysokim stopniu abstrakcji (gdzie często naiwna intuicja zawodzi) można porównać do wspinaczki górskiej we mgle, a więc w warunkach bardzo ograniczonej widoczności, kiedy to nie bardzo wiemy, w jakim kierunku się poruszać, a napotkane trudności mogą nas szybko zniechęcić i zmusić do odwrotu. Nagle mgła się rozstępuje i widać przed nami formację skalną, która narzuca nam logiczną kontynuację naszej drogi wiodącą prosto ku szczytowi. Podobnie w matematyce – bywa, że raptem następuje olśnienie, które pozwala wyjaśnić ukryte prawidłowości i wysłowić ciekawe stwierdzenie lub nawet zbudować interesującą nową teorię. Takie zdarzenia dają ogromną satysfakcję, choć sukces często okupiony jest wcześniejszym uciążliwym kluczeniem i poszukiwaniem właściwej drogi. Dochodzenie do poprawnego dowodu faktu, który wydaje się czasem bardzo intuicyjny, często zabiera mnóstwo czasu i to kilku pokoleniom matematyków. Przykładem jest tu otrzymanie w ostatnich latach dowodu tzw. *Wielkiego Twierdzenia Fermata* wysłowionego jeszcze w siedemnastym wieku przez znakomitego uczonego Pierre’a de Fermata, a udowodnionego w pełny sposób dopiero pod koniec roku 1994 przez Andrew Wilesa (przy udziale współpracowników) po paru stuleciach bezowocnych prób.



FOT. MICHAŁ ANDRZEJEWSKI

Chociaż wydaje się, że ustalenie prawdziwości powyższego sławnego twierdzenia nie było zbyt ważne, to jednak przez to, iż wielu matematyków nad tym zagadnieniem pracowało, przyniosło ono wiele ubocznych korzyści dla rozwoju matematyki. Często zdarza się w badaniach matematycznych, iż nie wiedząc jeszcze o ich ewentualnym praktycznym znaczeniu, podejmujemy je dlatego, że dane zagadnienia wydają się nam ciekawe. Tak też jest z badaniami algebraicznymi w ogólnym sensie. Przechodząc do analogii z górami, zauważmy, że często, zmierzając do szczytu albo wyszukując drogę na przełęcz, nie wiemy jakie tam otworzą się widoki i jakie dalsze trudności przyjdzie nam pokonywać.

Zwróćmy tu uwagę, że zarówno w górskiej wspinaczce, jak też w badaniach matematycznych (oraz – szerzej – w rozmaitych badaniach naukowych) intuicja może zawodzić, a powierzchowny ogląd sytuacji jest stanowczo niewystarczający. W górach zdarzyła mi ze czterdzieści lat temu taka sytuacja: wspinałem się zimą na Niżnie Rysy w Tatrach z kolegami, którzy mieli świetnie opanowaną wspinaczkę skalną i nie odczuwali potrzeby wyszukiwania łatwiejszych sposobów przejścia ściany. Po pokonaniu kilkudziesięciu metrów – niepotrzebnie w zbyt wyczerpujący sposób – koledzy nie byli już w stanie prowadzić dalej tego wejścia. Musiałem podjąć trud wspinaczki „na pierwszego" do końca drogi na szczyt, który był jeszcze dość daleko, a trudności wciąż pozostawały duże. Pamiętam także, jak na seminariach profesora Edwarda Marczewskiego z przełomu lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych ubiegłego wieku pewien młody człowiek wygłaszając jakieś stwierdzenia nie dowodził ich, lecz tylko wykrzykiwał: „Przecież to jest oczywiste, to od razu widać!", jednakże po prośbie profesora „no to niech to pan udowodni", nigdy jednak ten zdolny adept matematyki nie umiał poprzeć swoich przypuszczeń poprawnymi i pełnymi rozumowaniami, a często jego stwierdzenia okazywały się wprost nieprawdziwe. Być może - jego sposób rozumowania był ukierunkowany w sposób mniej przydatny w algebrze ogólnej. Matematyk ten zrezygnował w końcu z zajmowania się algebrą ogólną i wybrał inny dział matematyki. Wskazuje to również na fakt, iż rzetelne badania z algebry ogólnej bywają bardzo trudne, choć osiągnięte wartościowe rezultaty, po ich eleganckim udowodnieniu, wydają się prawie oczywiste. O tego typie trudności ogólnych badań algebraicznych przekonał się jeden z moich zdolniejszych uczniów i postanowił zająć się inną dziedziną, gdzie badania nie wymagają szerokiej wiedzy, a osiągane wyniki są bardziej efektowne, łatwiej można o nich opowiadać, a później dobrze „sprzedać". Podobnie w górach - bywają bardzo piękne szczyty o wspaniałych i trudnych ścianach, które ze względu na położenie „na krańcu świata", są mało znane i rzadko odwiedzane. Popularność tych gór i ścian znacznie ustępuje popularności innych, modniejszych, choć często mniej interesujących.

Jednym z licznych przykładów jak intuicja może zawodzić w ogólnych rozważaniach algebraicznych jest opinia z połowy lat 60-tych minionego stulecia jednego ze znanych matematyków na temat nowego dla nas wtedy pojęcia *n*-arnej grupy, właśnie zaimportowanego do Wrocławia, na seminarium profesora Marczewskiego z Moskwy, ze znakomitego seminarium prowadzonego przez sławnego algebraika Aleksandra Genadijewicza Kurosza. Wiadomo, że *n*-arne grupy są jednocześnie *n*-arnymi grupami i *n*-arnymi quasi-grupami. Tego typu algebrami zajmował się z inspiracji Emmy Noether w swoim doktoracie Wilhelm Dörnte, a później głęboko zbadał Emil L. Post Rzeczony wrocławski uczony, wybitny zresztą matematyk, zapoznawszy się definicją tego pojęcia na wspomnianym seminarium i usłyszawszy o nowej aksjomatyce dla klasy tego typu algebr, wygłosił od razu z pełnym przekonaniem pogląd, iż jeszcze tego wieczora, czy najbliższej nocy, w podobny sposób uogólni pojęcie grupy na przypadek działania (w sensie algebraicznym) o nieskończonej liczbie argumentów. Był to fałszywy pogląd, gdyż – jak w roku 1964 udowodnił Ǵorǵi (Đorđi) Čupona ze swoimi dwoma uczniami – nie istnieje „nieskończenie-arna" quasi-grupa zdefiniowana z pomocą działania o przeliczalnej liczbie argumentów spełniająca jednocześnie uogólnione prawo łączności wymagane dla ∞-arnej (przeliczalnie-arnej) półgrupy. Zajęli się tym zagadnieniem również inni badacze, jak np. Valentin D. Belousov i Zoran M. Stojaković. W rezultacie, niezależnie od autorów pierwszej pracy na ten temat, podobny rezultat został wydedukowany odmiennymi metodami (i opublikowany w 1973). – Również w górach intuicja częstokroć zawodzi. W czasie wędrówki na przykład grzbietem Czerwonych Wierchów w Tatrach Zachodnich, kuszą do zejścia na skróty szerokie trawiaste żleby. Wydaje się, że kilka takich żlebów szybko i bez żadnego kłopotu sprowadzi turystę do doliny. Jednakże jest to bardzo złudne, gdyż odległość do dna doliny nie jest taka mała, jak się wydaje, a w dodatku żleby są niżej podcięte stromymi i kruchymi urwiskami. Jest wiele przykładów tragedii w tym rejonie spowodowanych skracaniem w ten sposób zejść do doliny. Podobnie, taternika będącego na Granatach w Tatrach Wysokich zaprasza do prób zejścia górna część tzw. żlebu Drege'a. I znów próby zejścia nim załamują się w jego przewieszonej części i często kończą tragicznie.

Podobnie jak w górach – nie znając dobrze terenu i patrząc na ścianę ze skróconej perspektywy – wydaje się nieraz, że obrana marszruta łatwo doprowadzi do szczytu, tak i w ogólnych rozważaniach algebraicznych intuicja – wyrobiona na podstawie zbyt pobieżnego zapoznania się z tematem – bywa bardzo zawodna. Świetnym przykładem, ilustrującym tego typu sytuację w matematyce, jest pomysł zbadania wszystkich istotnie różnych algebr ogólnych na zbiorze dwuelementowym (czyli opisanie wszystkich algebr na tym zbiorze nie będących „termowo" równoważnymi, lub – w innej terminologii – algebr, które nie są słabo izomorficzne). Jest to ważny problem z punktu widzenia logiki matematycznej. Pierwszą reakcją laika na takie zagadnienie bywa przypuszczenie, iż na tak małym zbiorze nie może być nic ciekawego. Jednakże już w roku 1920 Emil L. Post w swojej pracy doktorskiej pokazał, iż na zbiorze dwuelementowym takich algebr jest nieskończenie wiele. Jest ich w tym wypadku przeliczalnie wiele, ale dokładne ich opisanie i usystematyzowanie zajęło Postowi sporo czasu. Efektem tej pracy była jego książka *Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, wydana w Princeton w roku 1941, i wcale nie jest to łatwa lektura. Warto tu dodać, że na zbiorze trójelementowym takich algebr jest znacznie więcej, mianowicie jest ich już nieprzeliczalnie wiele, a dokładniej – kontinuum. Co za ogromna różnica między liczbami „dwa" i „trzy", prawda?!

Powyższych pułapek w pracy naukowej, czy pomyłek i tragedii w górach, można uniknąć, należycie zgłębiając literaturę przedmiotu oraz posiadając należytą pokorę wobec ogromu zarówno wiedzy, jak i gór. Wymaga to oczywiście pewnego wysiłku i poświęcenia sporej ilości czasu. Jednak posiadanie odpowiednio głębokiej i szerokiej wiedzy jest w efekcie końcowym opłacalne. Unika się w ten sposób błądzenia w górach, a także powtarzania dróg wspinaczkowych, które już są znane, myśląc (a nawet to ogłaszając), iż dokonało się pierwszego ich przejścia. Co najistotniejsze, zdobyta wiedza pozwala często zapobiec tragedii. Natomiast w działalności naukowej pozwala to uniknąć rozczarowań spowodowanych utratą pierwszeństwa w jakichś odkryciach naukowych, albo też zmarnowaniem mnóstwa cennego czasu, który można byłoby spożytkować owocniej. Niestety w obecnej „dobie komputerów" niektórzy młodzi naukowcy, a także rzekomi odkrywcy nowych dróg, myślą, iż wystarczy uruchomić komputer i parę razy „kliknąć", aby cała potrzebna wiedza napłynęła prawie bez wysiłku.

Zdarza się, że w górach nie jesteśmy pewni, czy wybraliśmy najlepszą drogę do celu, np. szczytu lub przełęczy. Podobnie też bywa w matematyce, gdzie częstym pytaniem, stawianym przez ludzi „z zewnątrz", jest pytanie o zastosowania praktyczne danych rezultatów teoretycznych i z reguły bardzo abstrakcyjnych. Szkoda, iż dawne usprawiedliwienie dociekliwości naukowej w postaci: „zajmujemy się tymi zagadnieniami, dlatego że są one ciekawe", już często nie wystarcza przy obecnej komercjalizacji nauki. Znów analogia z górami: Na pytanie dziennikarzy o powody podejmowania prób zdobywania *„gor na kotorych nikto nie bywał"* (wedle znanej pieśni Władymira Wysockiego) – najbardziej rozsądną odpowiedzią wydaje się, ta udzielona przez sławnego himalaistę George'a Leigha Mallory'ego: „Dlatego, ponieważ one są!" Jednakże zwykły śmiertelnik nie potrafi pojąć, dlaczego alpiniści się tak męczą, marzną i narażają na różne niebezpieczeństwa, zamiast np. siedzieć na wygodnej kanapie i oglądać telewizję. W algebrze ogólnej trudno czasem „z miejsca" powiedzieć, dlaczego bada się jakieś zagadnienia. Stąd niektórzy myślą, iż może dlatego, że innych badań nie potrafi się robić, a nie dlatego, że to właśnie wydaje się interesujące. W dziedzinie tej jest sporo rozważań należących do zupełnie różnych nurtów badawczych, ale trudno określić, które z tych nurtów są „główne", „istotne" lub „ważniejsze". Nikt w każdym razie tego nie sprecyzował. Można najwyżej mówić o modniejszych kierunkach badań lub takich, które są rozwijane ze względów koniunkturalnych. Warto przypomnieć tu pogląd profesora Hugona Steinhausa, który porównywał działalność matematyka (polegającą na dowodzeniu nowych twierdzeń oraz budowania nowych teorii) do pracy krawca, który szyjąc nowe ubrania, często nie wie, czy i kiedy dane ubranie komuś się spodoba i je kupi. Matematyka zna wiele przykładów badań, które często zdawały się marginalne, a później okazywały się bardzo ważne. Dobrym przykładem jest powstała w starożytności teoria krzywych stożkowych, która dopiero po stuleciach znalazła ważne zastosowania (prawa Keplera, optyka i inne). Znajdywanie coraz większych liczb pierwszych było kiedyś czystą zabawą intelektualną, ale ostatnio stało się bardzo pożytecznym zajęciem ze względu na zastosowania w kryptografii. Coraz więcej dziwnych badań ogólno-algebraicznych, na pewno nie będących w „głównym nurcie", znajduje zastosowanie w podstawach teoretycznych informatyki. Jako przykład warto wspomnieć różnego typu półpierścienie (czyli zbiory z określonymi dwoma działaniami spełniającymi warunek łączności i warunek rozdzielności drugiego z nich względem pierwszego – podobnie jak to jest z dodawaniem i mnożeniem w zwykłych zbiorach liczbowych, czyli w pierścieniach liczbowych). Są one obecnie badane na przykład w związku z teorią języków formalnych i teorią tzw. automatów (w sensie matematycznym), gdy początkowo badania nad tego rodzaju systemami algebraicznymi uważano za hobbistyczne uogólnienia zwykłych pierścieni (w sensie algebraicznym) bez większego znaczenia. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w mojej obszernej książce typu monograficznego *A Guide to the Literature on Semirings and their Applications in Mathematics and Information Sciences* (Kluwer, 2002).

Z wielością wyżej wspomnianych analogii pewien dysonans tworzy fakt, że wielkie i często dozgonne przyjaźnie nawiązywane w górach podczas wspinaczki, w czasie której taternicy są związani jedną liną i starają sobie w miarę możności pomagać (częstokroć z dużym poświęceniem), co nie znajduje pełnej analogii w działalności naukowej, gdzie nawet napisanie paru wspólnych prac nie daje jeszcze tak mocnej więzi emocjonalnej. Szkoda, że taką współpracę czasem rujnuje zwykła ludzka zawiść.

Często nie można też porównywać wyników naukowych osiąganych w różnych dziedzinach, nieraz bardzo odległych od siebie. Podobnie jak nie można powiedzieć, czy wyniki sportowe z dwóch całkiem różnych dyscyplin – na przykład boksu i skoków narciarskich – są z sobą porównywalne. Taternicy wiedzą, że nawet pokonywanie tej samej drogi w odmiennych warunkach atmosferycznych sprawia bardzo różne trudności i niebezpieczeństwa. Także osiągnięć wspinacza skalnego wspinającego się na krótkich ścianach kilkunastometrowych nie można porównywać z osiągnięciami alpinisty pokonującego wielkie ściany pokryte często lodem i śniegiem. Istniejąca więc obecnie tendencja – lansowana przez media i wygodna dla biurokratów – tworzenia rozmaitych rankingów i układania „na siłę" w porządku liniowym różnych nieporównywalnych zjawisk życia społecznego, rozmaitych wyników badań naukowych czy innych przejawów twórczej działalności, prowadzi w oczywisty sposób do absurdów. Z tego względu preferowanie np. osławionej „listy filadelfijskiej" (klasyfikującej czasopisma naukowe) lub też sztucznie tworzonych (i bardzo wybiórczo) list cytowań nie ma większego sensu. Tym bardziej, że oceny dokonywane na tej podstawie sprowadzają się do podliczania punktów, a nie analizy merytorycznej. Matematycy, a także logicy i nie tylko oni, doskonale wiedzą, że w rzeczywistości uporządkowanie liniowe zdarza się raczej rzadko, a bardziej powszechnym i naturalnym sposobem byłoby tzw. uporządkowanie częściowe, czyli z pomocą relacji zwrotnej, anty-symetrycznej i przechodniej. Ta uwaga wskazuje na to, że tylko porównywanie wyników w małych obszarach tematycznych prowadzi do sensownej ich klasyfikacji.

Reasumując tych kilka myśli, nabieramy pewności, że dochodzenie do prawdy naukowej może się odbywać różnymi drogami i na podstawie analizy różnych aspektów rzeczywistości, podobnie jak szczyty gór można zdobywać z różnych stron, dokonywać rozmaitymi drogami, oglądając przy tym różne widoki. Nie można w żadnym wypadku deprecjonować ludzi chodzących odmiennymi drogami, chociaż bylibyśmy przekonani, iż nasz wybór sposobu podążania do celu jest najlepszy.

Chociaż wyartykułowane tutaj moje refleksje oparte są na doświadczeniach wyniesionych z własnych dziedzin badań i zainteresowań (algebra ogólna, alpinizm, oraz – marginalnie – gra szachowa), myślę jednak, że wiele z tych spostrzeżeń można też odnieść do innych obszarów działalności, a w szczególności do innych dziedzin badań naukowych.

*Kazimierz Głazek**

* Autor jest profesorem matematyki UZ, a powyższy esej jest fragmentem tekstu przyjętego do druku w księdze pamiątkowej publikowanej przez Uniwersytet Wrocławski z okazji jubileuszu prof. zw. dr hab. Jacka Kolbuszewskiego